



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość elementów maszyn

Wykład Nr 5

Metody energetyczne – część 2

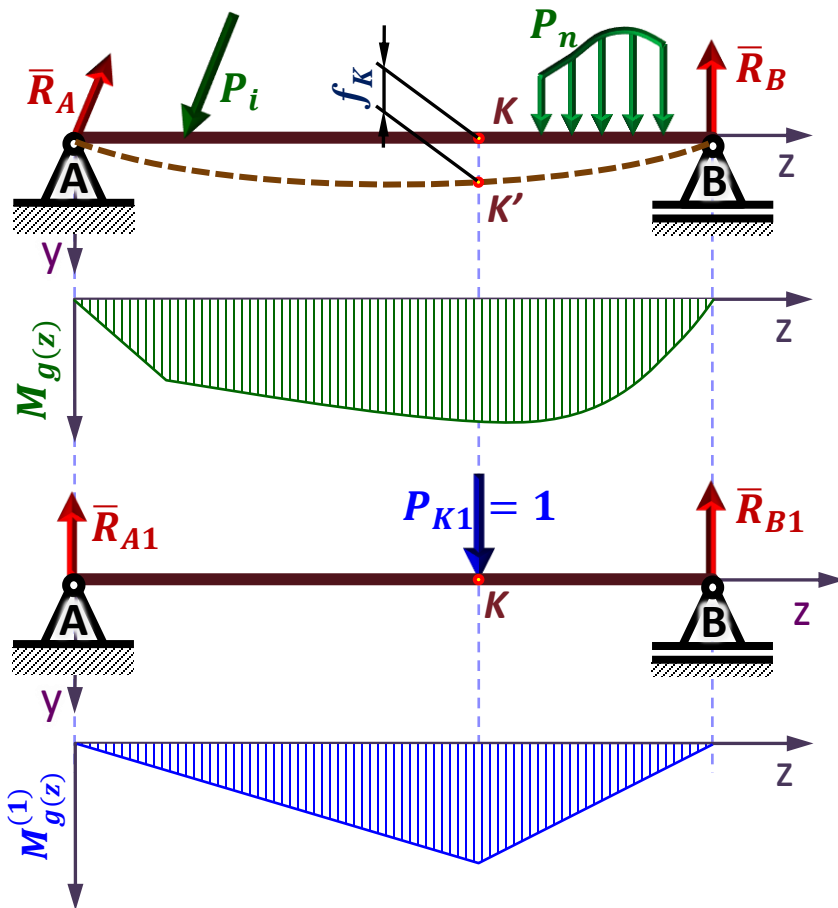
Wyznaczanie deformacji układów liniowo-sprężystych: metoda Maxwella-Mohra; metoda Wereszczagina; przykłady obliczeniowe.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

5.1. Metoda Maxwella–Mohra



Układ liniowo-sprężysty o danej sztywności EJ poddany jest działaniu uogólnionych sił P_i .

Szukane: f_K – uogólnione przemieszczenie punktu K

1° Wyznaczono funkcję momentu gnącego od obciążenia zewnętrznego: $M_g(z)$

2° Ten sam układ obciążono fikcyjną jednostkową siłą uogólnioną ($P_{K1}=1$) w punkcie i na kierunku szukanego przemieszczenia f_K ; wyznaczono funkcję momentu gnącego wywołanego tą siłą: $M_g^{(1)}(z)$.

3° Zgodnie z właściwościami układów liniowo-sprężystych:
a) funkcję momentu gnącego wywołanego siłą $P_K \neq 1$ można zapisać jako:

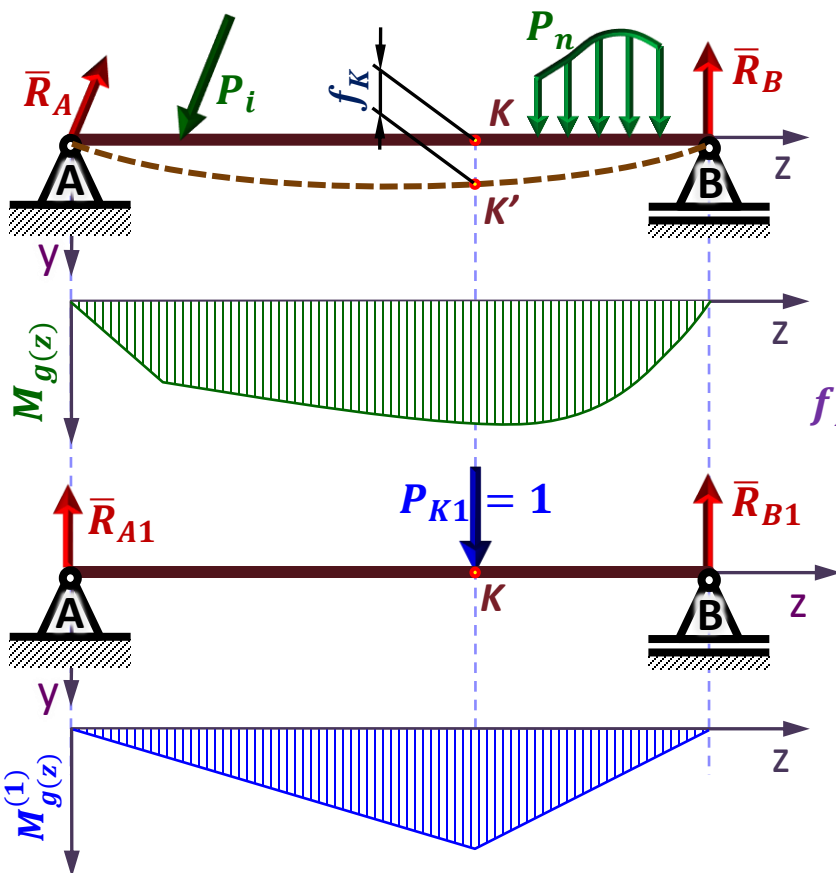
$$M_g^{(Pk)} = M_g^{(1)} \cdot P_K$$

b) funkcję momentu gnącego wywołanego sumarycznym działaniem obciążenia zewnętrznego (P_i) i uogólnioną siłą $P_K \neq 1$ można zapisać jako:

$$M_g^{(Pi+Pk)} = M_g(z) + M_g^{(Pk)} = M_g(z) + M_g^{(1)} \cdot P_K$$

5.1. Metoda Maxwella–Mohra

4° Zgodnie z twierdzeniem Castigliano:



$$f_K = \frac{\partial U}{\partial P_K} = \int_0^l \frac{1}{EJ} M_{g(z)}^{(Pi+Pk)} \frac{\partial (M_{g(z)}^{(Pi+Pk)})}{\partial P_K} dz$$

$$M_{g(z)}^{(Pi+Pk)} = M_{g(z)} + M_{g(z)}^{(1)} \cdot P_K$$

$$f_K = \int_0^l \frac{1}{EJ} (M_{g(z)} + M_{g(z)}^{(1)} \cdot P_K) \frac{\partial (M_{g(z)} + M_{g(z)}^{(1)} \cdot P_K)}{\partial P_K} dz$$

$$f_K = \int_0^l \frac{1}{EJ} (M_{g(z)} + M_{g(z)}^{(1)} \cdot P_K) M_{g(z)}^{(1)} dz$$

uwzględniając, że siła fikcyjna: $P_K = 0$

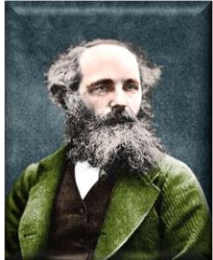
$$f_K = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{(1)}}{EJ} dz$$

wzór Maxwella-Mohra
(dla zginania)

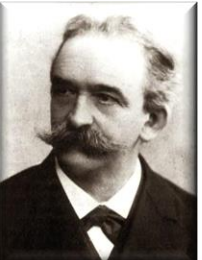
gdzie:

$M_{g(z)}$ - funkcja momentu gnącego pochodzącego od obciążenia zewnętrznego,

$M_{g(z)}^{(1)}$ - funkcja momentu gnącego pochodzącego od uogólnionej siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie - i działającej na kierunku - szukanego przemieszczenia.



James Clerk Maxwell
(1831–1879) szkocki fizyk i matematyk



Christian Otto Mohr
(1835–1918) niemiecki inżynier i wynalazca

5.1. Metoda Maxwella–Mohra

wzór Maxwella-Mohra

(dla zginania)

$$f_K = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{(1)}}{EJ} dz$$

$M_{g(z)}$ - równanie na moment gnący wywołany obciążeniem zewnętrznym,

$M_{g(z)}^{(1)}$ - równanie na moment gnący wywołany uogólnioną siłą jednostkową, działającą w punkcie i na kierunku szukanego przemieszczenia.

Jeśli całkowita energia sprężysta układu wywołana jest nie tylko działaniem momentów zginających ($M_{g(z)}$), ale także sił normalnych ($N_{(z)}$), sił tnących ($T_{(z)}$) i momentów skręcających ($M_{s(z)}$),

uogólnione równanie Maxwella-Mohra ma postać:

$$f_K = \int_0^l \frac{N_{(z)} \cdot N_{(z)}^{(1)}}{EA} dz + \int_0^l \frac{T_{(z)} \cdot T_{(z)}^{(1)}}{GA} dz + \int_0^l \frac{M_{s(z)} \cdot M_{s(z)}^{(1)}}{GJ_0} dz + \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{(1)}}{EJ} dz$$

gdzie:

$N_{(z)}$ oraz $N_{(z)}^{(1)}$ - zależności na siłę normalną wywołaną **obciążeniem zewnętrznym**, oraz wywołaną uogólnioną siłą jednostkową, działającą w punkcie i na kierunku szukanego przemieszczenia.

$T_{(z)}$ oraz $T_{(z)}^{(1)}$ - zależności na siłę tnącą wywołaną **obciążeniem zewnętrznym**, oraz wywołaną uogólnioną siłą jednostkową, działającą w punkcie i na kierunku szukanego przemieszczenia.

$M_{s(z)}$ oraz $M_{s(z)}^{(1)}$ - zależności na moment skręcający wywołany **obciążeniem zewnętrznym**, oraz wywołany uogólnioną siłą jednostkową, działającą w punkcie i na kierunku szukanego przemieszczenia.

A – pole przekroju poprzecznego,

E – moduł Younga,

J oraz J_0 – osiowy oraz biegunowy moment bezwładności,

G – moduł Kirchoffa,

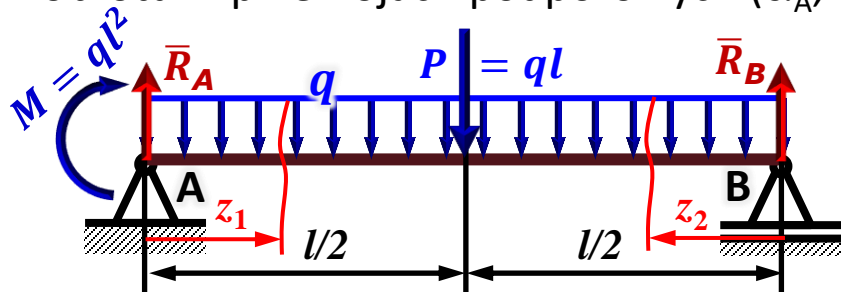


AGH

5.2. Metoda Maxwella–Mohra – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.1:

Stosując metodę Maxwella - Mohra obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ($f_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B).



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

1° Reakcje i momenty gnące od obciążenia zewnętrznego:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow -ql^2 + \frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{2} - R_A l = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0$$

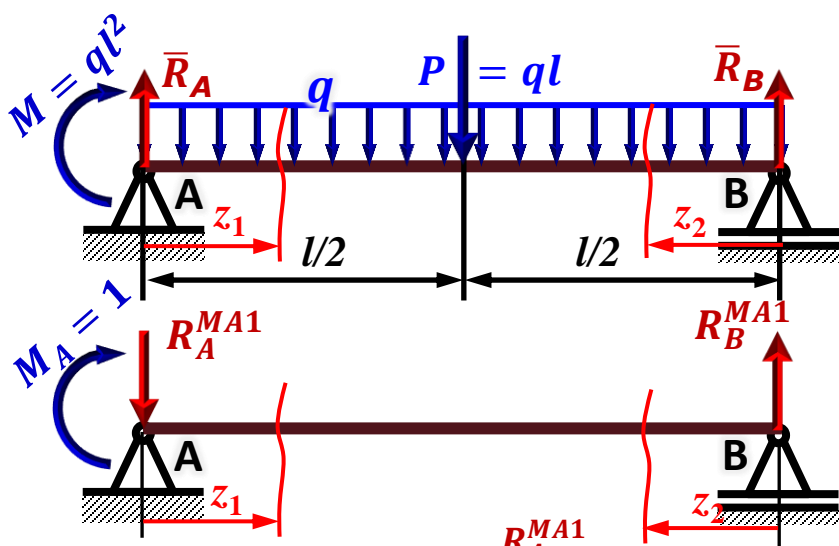
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql - ql + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 2ql$$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)} = -q \frac{z_1^2}{2} + \boxed{ql^2}$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)} = -q \frac{z_2^2}{2} + \boxed{2ql} \cdot z_2$$

5.2. Metoda Maxwella–Mohra – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.1:



Dane: EJ, q, l

Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)} = -q \frac{z_1^2}{2} + ql^2$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)} = -q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2$$

2° Wyznaczanie kąta obrotu punktu A:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow R_A^{MA1} = \frac{1}{l} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow R_B^{MA1} = \frac{1}{l} = 0$$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)}^{MA1} = 1 - \frac{1}{l} z_1 \quad 0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)}^{MA1} = \frac{1}{l} z_2$$

$$\alpha_A = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{MA1}}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_1^2}{2} + ql^2 \right) \left(1 - \frac{z_1}{l} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2 \right) \frac{z_2}{l} dz_2$$

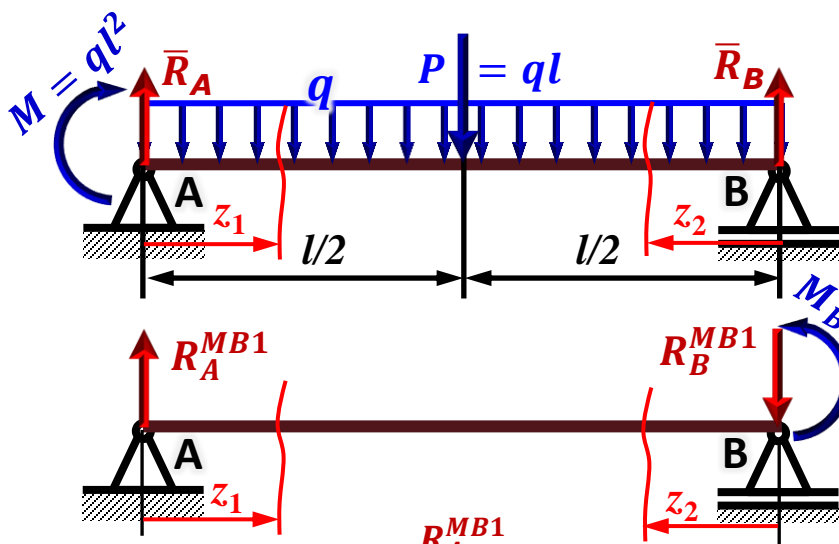
$$\alpha_A = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^3}{48} + \frac{ql^3}{2} + \frac{ql^3}{128} - \frac{ql^3}{8} \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^3}{128} + \frac{ql^3}{12} \right) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^3}{48} + \frac{24ql^3}{48} - \frac{6ql^3}{48} + \frac{4ql^3}{48} \right)$$

$$\alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}$$

por. z przykładem 4.3

5.2. Metoda Maxwella–Mohra – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.1:



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)} = -q \frac{z_1^2}{2} + ql^2$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)} = -q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2$$

3° Wyznaczanie kąta obrotu punktu B:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow R_B^{MB1} = \frac{1}{l} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A^{MB1} = \frac{1}{l} = 0$$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)}^{MB1} = \frac{1}{l} z_1 \quad 0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)}^{MB1} = 1 - \frac{1}{l} z_2$$

$$\alpha_B = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{MB1}}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_1^2}{2} + ql^2 \right) \frac{z_1}{l} dz_1 + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2 \right) \left(1 - \frac{z_2}{l} \right) dz_2$$

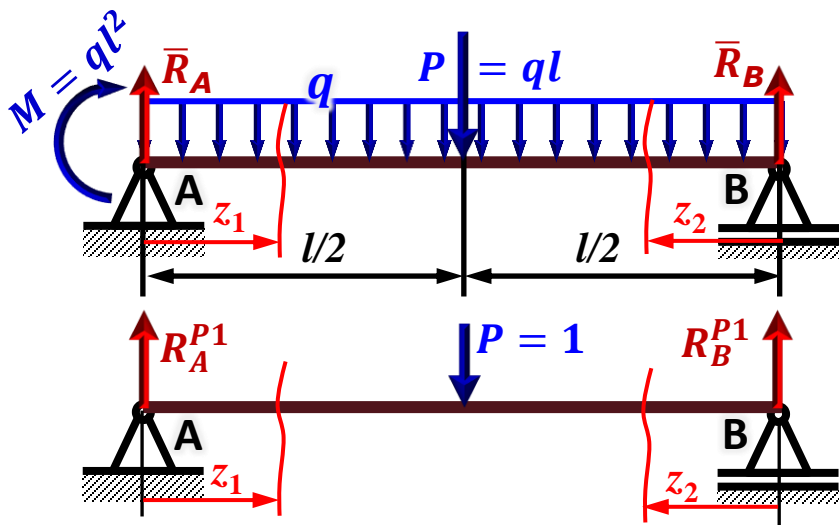
$$\alpha_B = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^3}{128} + \frac{ql^3}{8} \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^3}{48} + \frac{ql^3}{4} + \frac{ql^3}{128} - \frac{ql^3}{12} \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{6ql^3}{48} - \frac{ql^3}{48} + \frac{12ql^3}{48} - \frac{4ql^3}{48} \right)$$

$$\alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ}$$

por. z przykładem 4.3

5.2. Metoda Maxwella–Mohra – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.1:



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: \quad M_{g(z_1)} = -q \frac{z_1^2}{2} + ql^2$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: \quad M_{g(z_2)} = -q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2$$

4° Wyznaczanie ugięcia środka belki:

Z symetrii układu: $R_A^{P1} = R_B^{P1} = \frac{1}{2}$

$$0 \leq z_1 \leq l/2: \quad M_{g(z_1)}^{MB1} = \frac{1}{2} z_1 \quad 0 \leq z_2 \leq l/2: \quad M_{g(z_2)}^{MB1} = \frac{1}{2} z_2$$

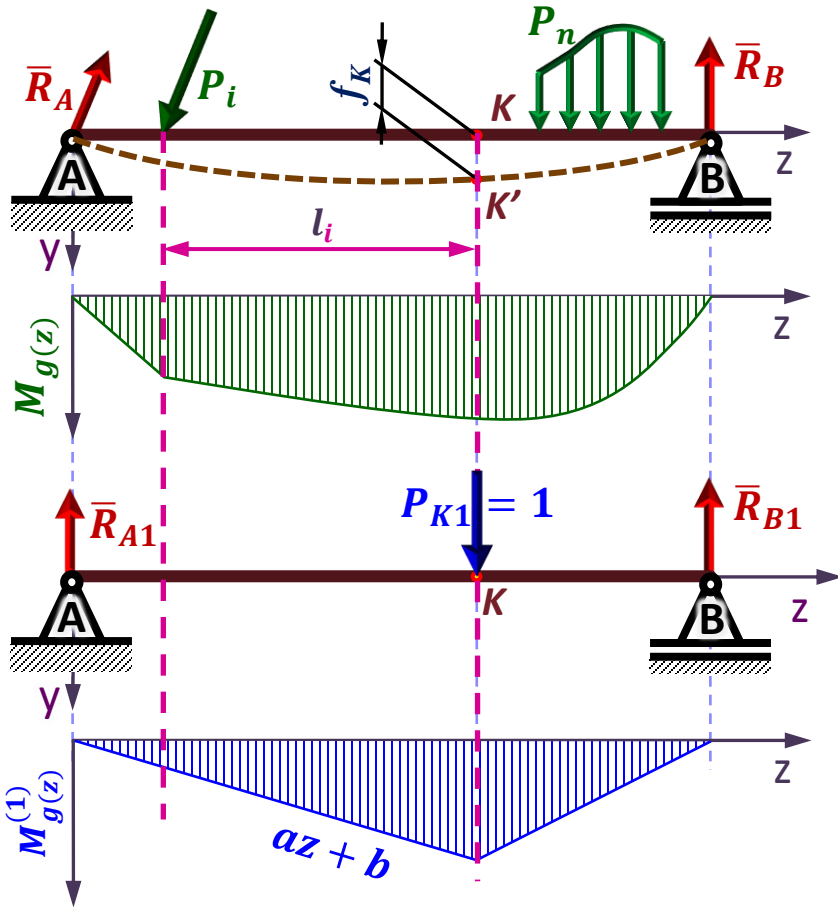
$$f_{(l/2)} = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{MB1}}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_1^2}{2} + ql^2 \right) \frac{z_1}{2} dz_1 + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(-q \frac{z_2^2}{2} + 2ql \cdot z_2 \right) \frac{z_2}{2} dz_2$$

$$f_{(l/2)} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^4}{256} + \frac{ql^4}{16} \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^4}{256} + \frac{ql^4}{24} \right) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{3ql^4}{768} + \frac{48ql^4}{768} - \frac{3ql^4}{768} + \frac{32ql^4}{768} \right)$$

$$f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}$$

por. z przykładem 4.3

5.3. Metoda Wereszczagina



Wzór Maxwella-Mohra dla zginania

$$f_K = \int_0^l \frac{M_{g(z)} \cdot M_{g(z)}^{(1)}}{EJ} dz = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \frac{M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)}}{EJ_i} dz$$

gdzie: i – dany przedział zmienności momentów gnących, tj. odcinek belki, wzdłuż którego momenty gnące – od obciążenie zewnętrznego i obciążenia jednostkowego – opisane są jednym równaniem, odpowiednio: $M_{gi(z)}$ i $M_{gi(z)}^{(1)}$.

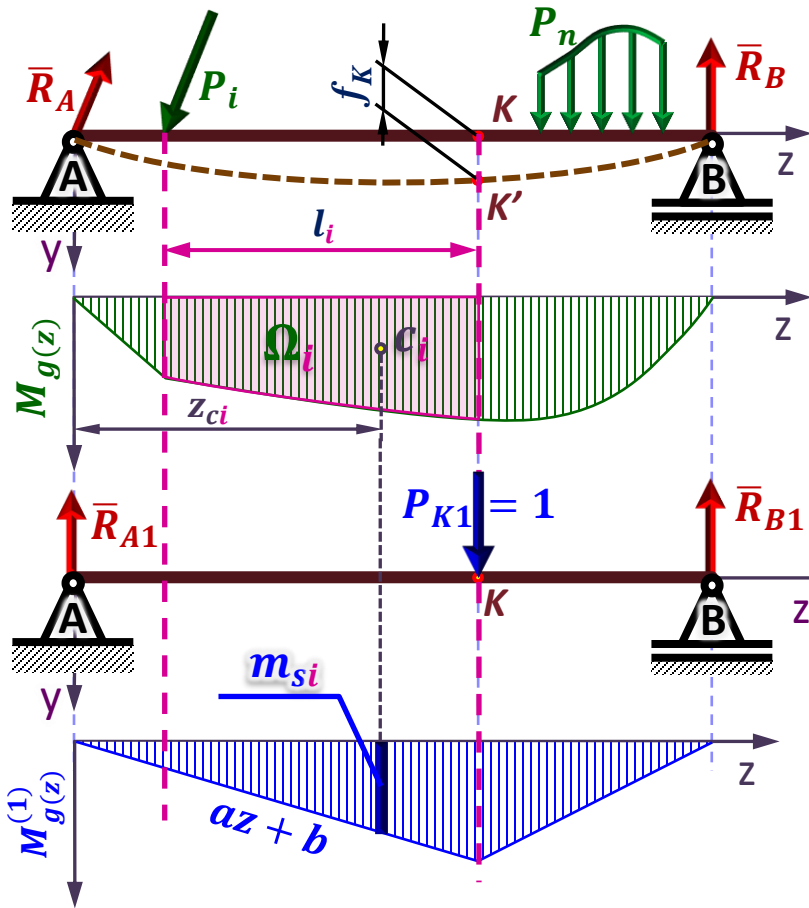
$$\text{dla } EJ_i = \text{const.}: f_K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EJ_i} \int_{(l_i)} M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)} dz$$

W przedziale i moment $M_{gi(z)}^{(1)}$ jest liniowy: $M_{gi(z)}^{(1)} = az + b$

$$\text{stąd: } \int_{(l_i)} M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)} dz = \int_{(l_i)} M_{gi(z)} (az + b) dz$$

$$= a \int_{(l_i)} M_{gi(z)} z dz + b \int_{(l_i)} M_{gi(z)} dz$$

5.3. Metoda Wereszczagina



$$\int_{(l_i)} M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)} dz = a \int_{(l_i)} M_{gi(z)} z dz + b \int_{(l_i)} M_{gi(z)} dz$$

$$\int_{(l_i)} M_{gi(z)} dz = \Omega_i - \text{pole pod wykresem } M_{gi(z)}$$

$$\int_{(l_i)} M_{gi(z)} z dz = S_y^{\Omega_i} = \Omega_i \cdot z_{ci} \left\{ \begin{array}{l} \text{moment statyczny pola} \\ \Omega_i \text{ względem osi } y \end{array} \right.$$

Stąd:

$$\int_{(l_i)} M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)} dz = a \cdot \Omega_i \cdot z_{ci} + b \cdot \Omega_i = \Omega_i (a \cdot z_{ci} + b)$$

$$a \cdot z_{ci} + b = m_{si} \left\{ \begin{array}{l} \text{wartość momentu od obciążenia} \\ \text{jednostkowego } M_{gi(z)}^{(1)} \text{ pod środkiem} \\ \text{ciężkości pola } \Omega_i. \end{array} \right.$$

reguła Wereszczagina*

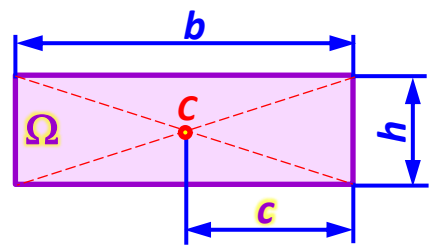
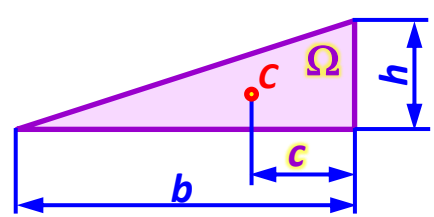
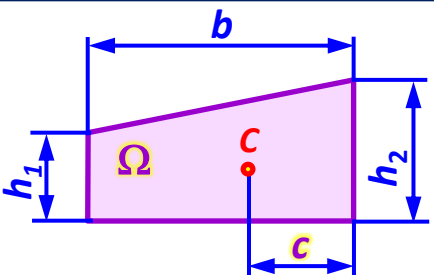
$$\int_{(l_i)} M_{gi(z)} \cdot M_{gi(z)}^{(1)} dz = \Omega_i \cdot m_{si}$$

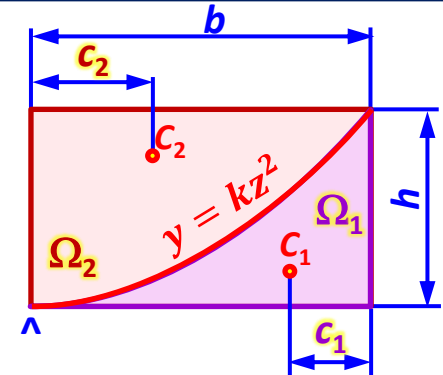
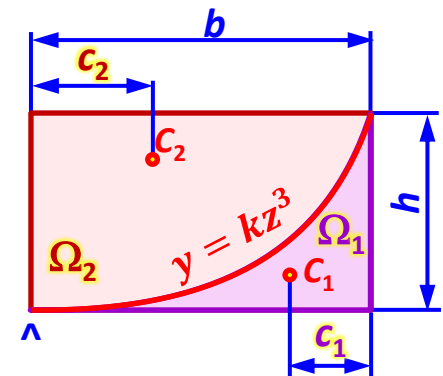


*Andriy Konstantynowicz Wereszczagin (1896-1959) – radziecki inżynier

Catkę z iloczynu $M_{gi(z)} M_{gi(z)}^{(1)}$ można obliczyć jako iloczyn pola wykresu momentu zginającego wywołanego obciążeniem zewnętrznym (Ω_i) i wartości momentu od obciążenia jednostkowego (m_{si}) dla współrzędnej środka ciężkości pola Ω_i .

5.4. Zależności na pola powierzchni i środki ciężkości figur opisujących rozkłady momentów zginających

Szkic	Ω, c
	$\Omega = bh$ $c = \frac{b}{2}$
	$\Omega = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{b}{3}$
	$\Omega = b \frac{h_1 + h_2}{2}$ $c = \frac{b}{3} \cdot \frac{2h_1 + h_2}{h_1 + h_2}$

Szkic	Ω	c
	$\Omega_2 = \frac{2bh}{3}$ $\Omega_1 = \frac{bh}{3}$	$c_2 = \frac{3b}{8}$ $c_1 = \frac{b}{4}$
	$\Omega_2 = \frac{3bh}{4}$ $\Omega_1 = \frac{bh}{4}$	$c_2 = \frac{2b}{5}$ $c_1 = \frac{b}{5}$

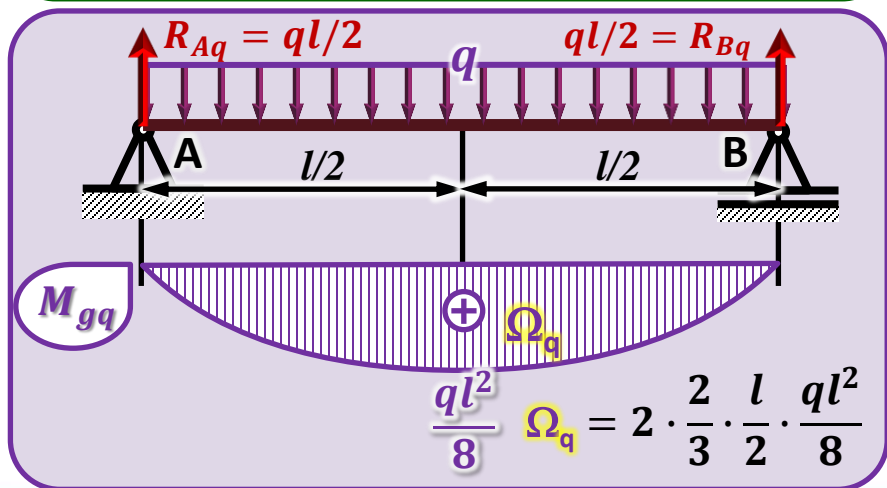
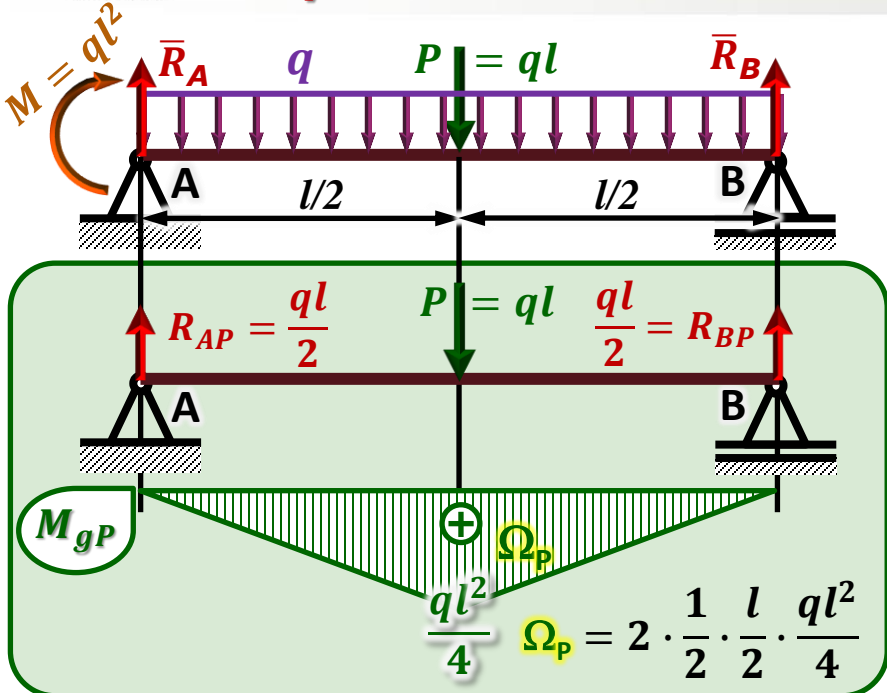
^ - współrzędna ekstremum funkcji



AGH

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.2



Stosując metodę Wereszczagina obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B).

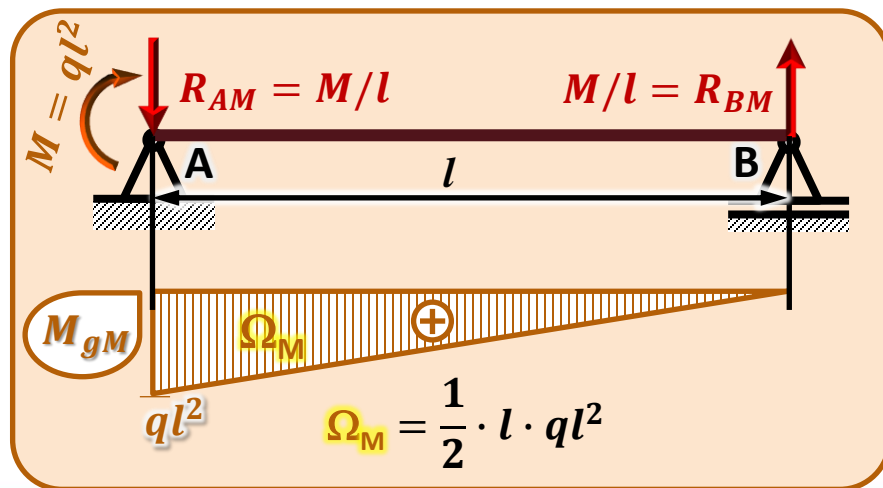
Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

1° Momenty gnące od poszczególnych składowych obciążenia zewnętrznego (por. przykład 1.3):

$$\Omega_P = \frac{ql^3}{8}$$

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12}$$

$$\Omega_M = \frac{ql^3}{2}$$

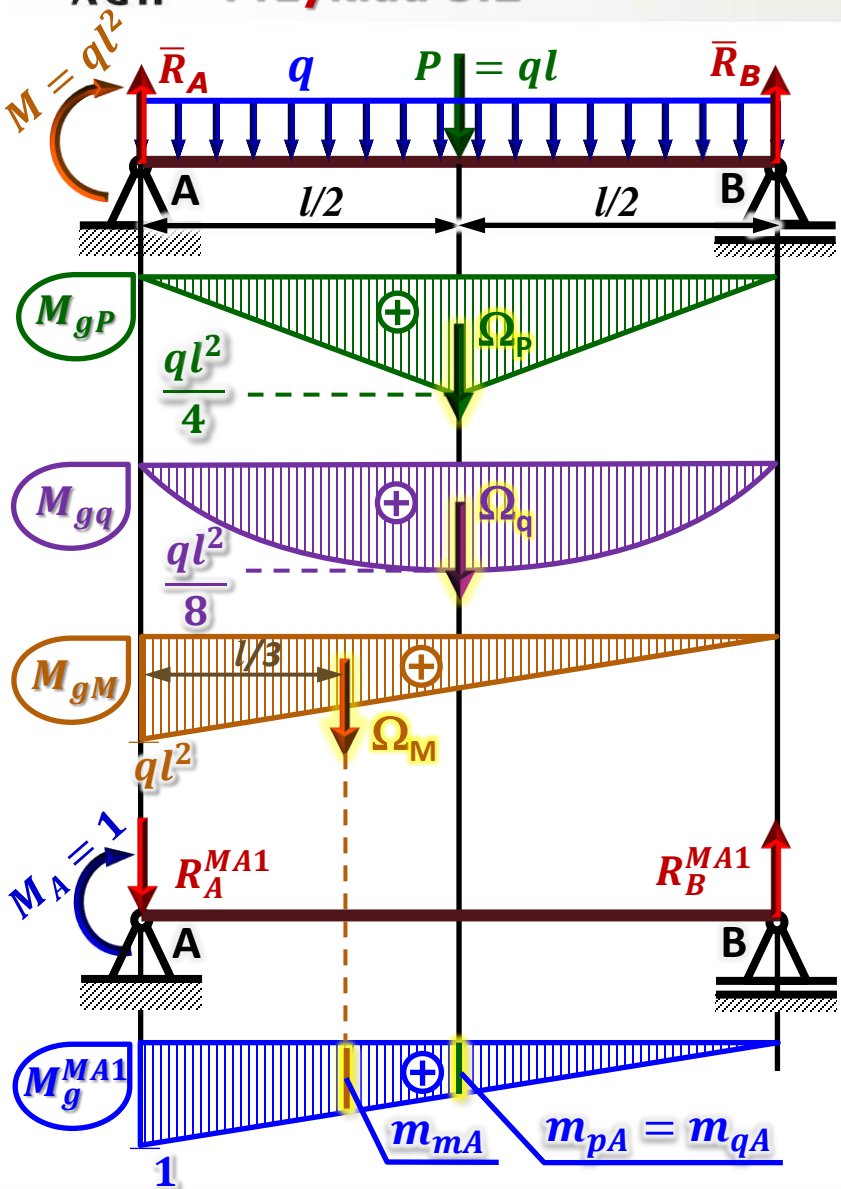




AGH

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.2



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

2° Wyznaczanie kąta obrotu w punkcie A:

$$\alpha_A = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot m_{si}$$

$$\Omega_P = \frac{ql^3}{8}$$

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12}$$

$$\Omega_M = \frac{ql^3}{2}$$

$$m_{pA} = m_{qA} = \frac{1}{2} \quad m_{mA} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_A = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$\alpha_A = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{16} + \frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{3} \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{3ql^3}{48} + \frac{2ql^3}{48} + \frac{16ql^3}{48} \right)$$



$$\alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}$$

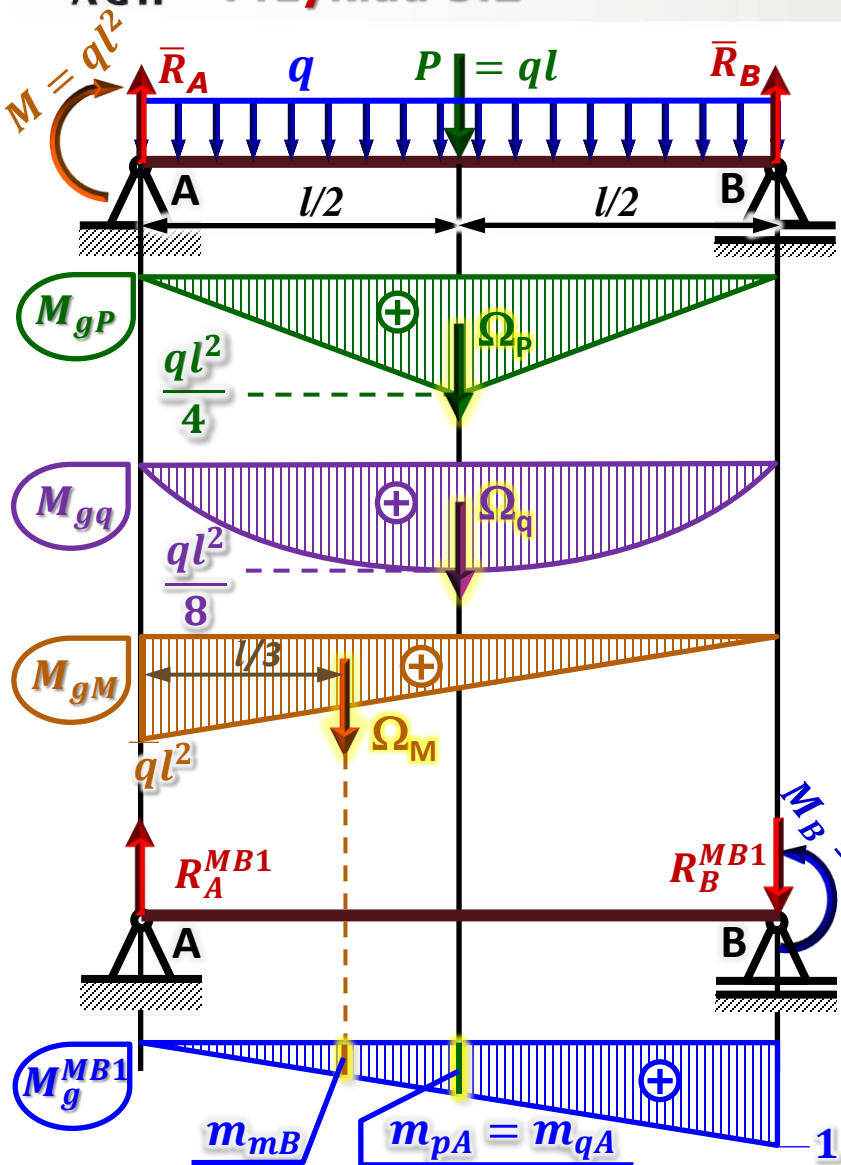
por. z przykładem 5.1



AGH

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.2



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

3° Wyznaczanie kąta obrotu w punkcie B:

$$\alpha_B = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot m_{si}$$

$$\Omega_P = \frac{ql^3}{8}$$

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12}$$

$$\Omega_M = \frac{ql^3}{2}$$

$$m_{pB} = m_{qB} = \frac{1}{2} \quad m_{mB} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_B = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^3}{2} \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$\alpha_B = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{16} + \frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{6} \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{3ql^3}{48} + \frac{2ql^3}{48} + \frac{8ql^3}{48} \right)$$



$$\alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ}$$

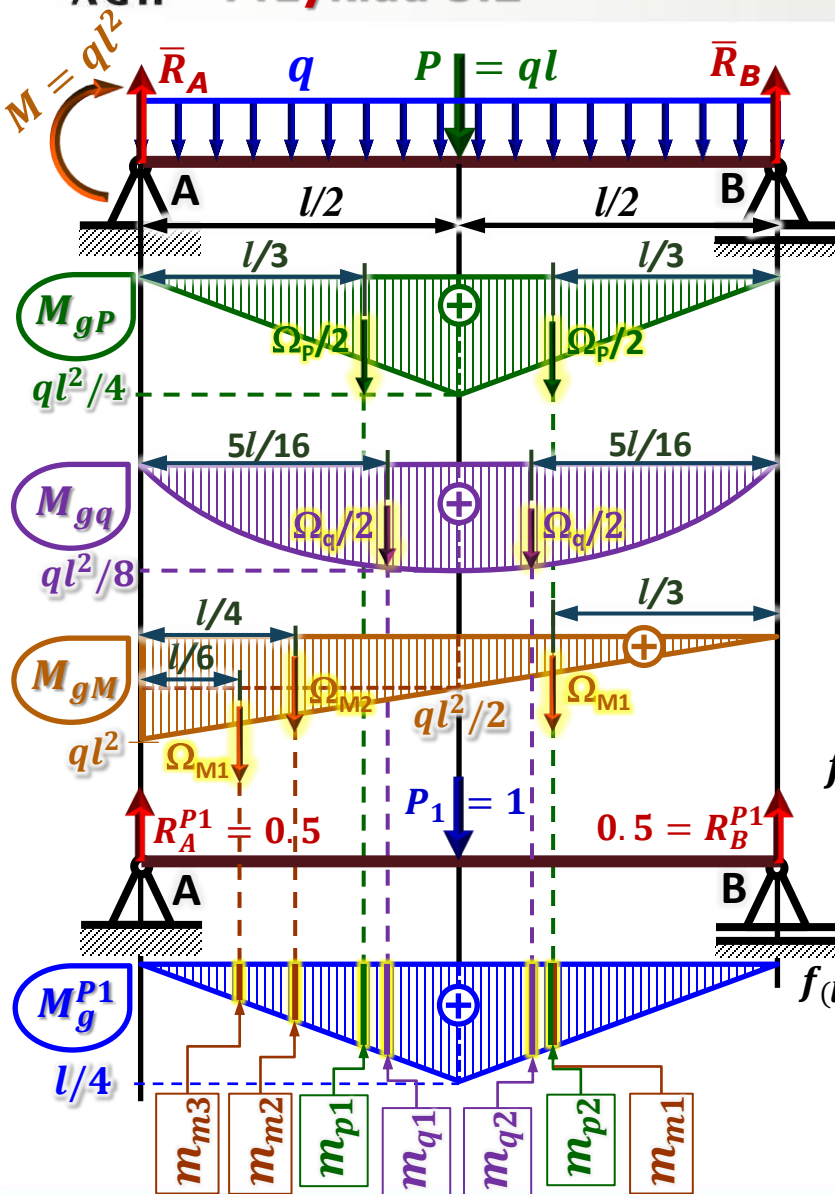
por. z przykładem 5.1



AGH

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.2



Dane: EJ, q, l Szukane: $\alpha_A, \alpha_B, f_{(l/2)}$

4° Wyznaczanie ugięcia środka belki:

UWAGA: Pola przekrojów Ω_{q_i} i odpowiadające im współrzędne m_{si} rozpatrywane być muszą w pojedynczych przedziałach zmienności momentu wywołanego obciążeniem jednostkowym ($M_{gi(z)}$).

$\frac{\Omega_p}{2} = \frac{ql^3}{16}$	$\frac{\Omega_q}{2} = \frac{ql^3}{24}$	$\Omega_{M1} = \frac{ql^3}{8}$	$\Omega_{M2} = \frac{ql^3}{4}$
--	--	--------------------------------	--------------------------------

$m_{p1} = \frac{l}{6}$	$m_{q1} = \frac{5l}{32}$	$m_{m1} = \frac{l}{6}$	$m_{m2} = \frac{l}{8}$
$m_{p2} = \frac{l}{6}$	$m_{q2} = \frac{5l}{32}$	$m_{m3} = \frac{l}{12}$	

$$f_{(l/2)} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{\Omega_p}{2} m_{p1} + \frac{\Omega_p}{2} m_{p2} + \frac{\Omega_q}{2} m_{q1} + \frac{\Omega_q}{2} m_{q2} + \Omega_{M1} m_{m1} + \Omega_{M2} m_{m2} + \Omega_{M1} m_{m3} \right)$$

$$f_{(l/2)} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3 l}{16 \cdot 6} + \frac{ql^3 l}{16 \cdot 6} + \frac{ql^3 5l}{24 \cdot 32} + \frac{ql^3 5l}{24 \cdot 32} + \frac{ql^3 l}{8 \cdot 6} + \frac{ql^3 l}{4 \cdot 8} + \frac{ql^3 l}{8 \cdot 12} \right)$$

$$f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}$$

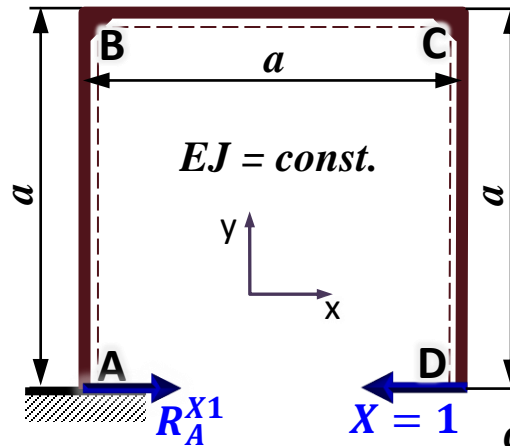
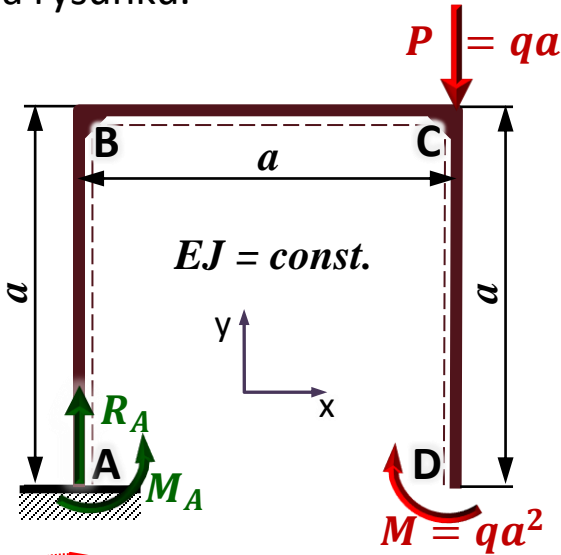
por. z przykładem 5.1

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.3

Stosując metodę Wereszczagina obliczyć poziome i pionowe przemieszczenie swobodnego końca ramy jak na rysunku.

Dane: EJ, q, a Szukane: $\Delta x_D, \Delta y_D$



$$\Delta x_D = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot m_{xi} =$$

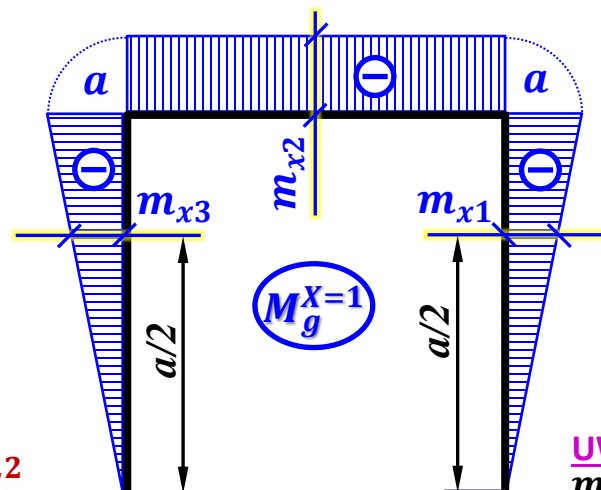
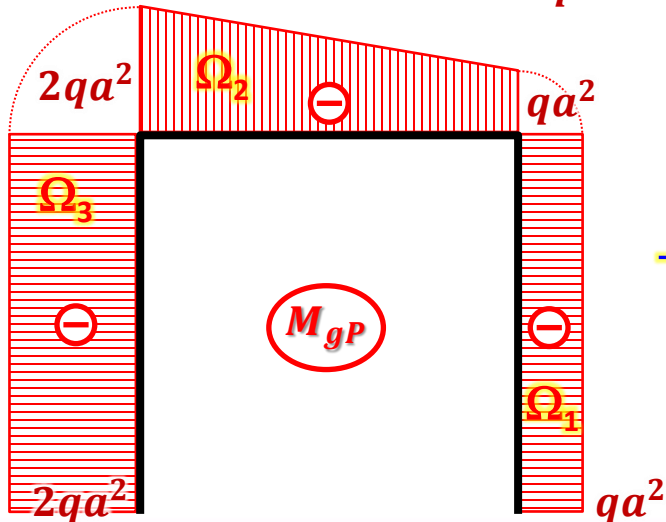
$$= \frac{1}{EJ} (\Omega_1 m_{x1} + \Omega_2 m_{x2} + \Omega_3 m_{x3})$$

$$\Delta x_D = \frac{1}{EJ} \left(-qa^3 \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) -$$

$$\frac{qa^2 + 2qa^2}{2} a \cdot (-a) - 2qa^3 \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) \right)$$

$$\Delta x_D = \frac{qa^4}{EJ} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \right)$$

$$\Delta x_D = \frac{3qa^4}{EJ}$$



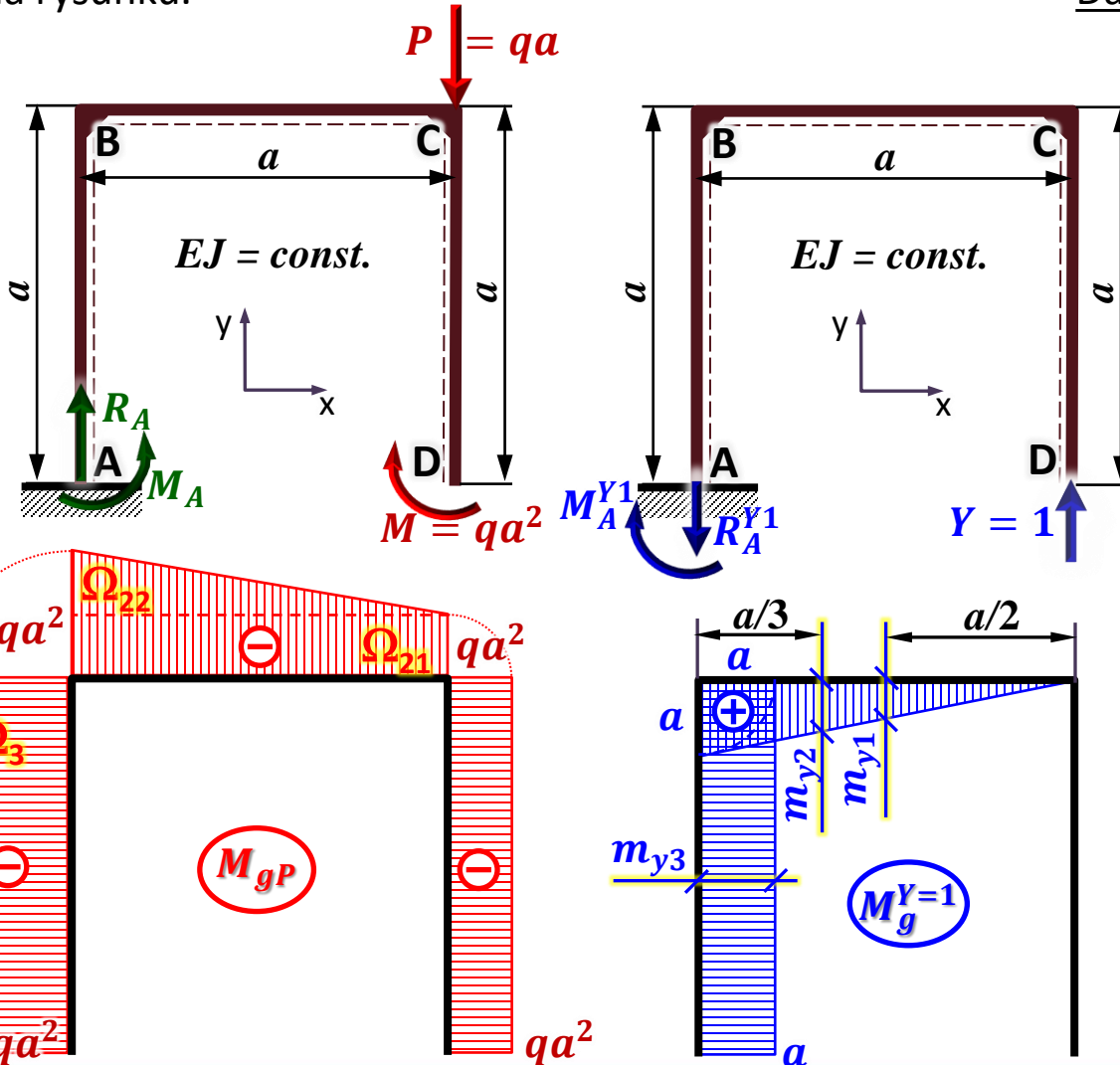
UWAGA: Pola Ω_i są ujemne i współrzędne m_{xi} są ujemne.

5.5. Metoda Wereszczagina – przykłady obliczeniowe

Przykład 5.3

Stosując metodę Wereszczagina obliczyć poziome i pionowe przemieszczenie swobodnego końca ramy jak na rysunku.

Dane: EJ, q, a Szukane: $\Delta x_D, \Delta y_D$



$$\Delta y_D = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \Omega_i \cdot m_{xi} =$$

$$= \frac{1}{EJ} (\Omega_{21} m_{y1} + \Omega_{22} m_{y2} + \Omega_3 m_{y3})$$

$$\Delta y_D = \frac{1}{EJ} \left(-qa^3 \cdot \frac{a}{2} - \frac{qa^3}{2} \cdot \frac{2}{3} a - 2qa^3 \cdot a \right)$$

$$\Delta y_D = -\frac{qa^4}{EJ} \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6} \right)$$

$$\Delta y_D = \frac{17qa^4}{6EJ}$$

UWAGA: Pola Ω_i są ujemne zaś współrzędne m_{xi} są dodatnie.